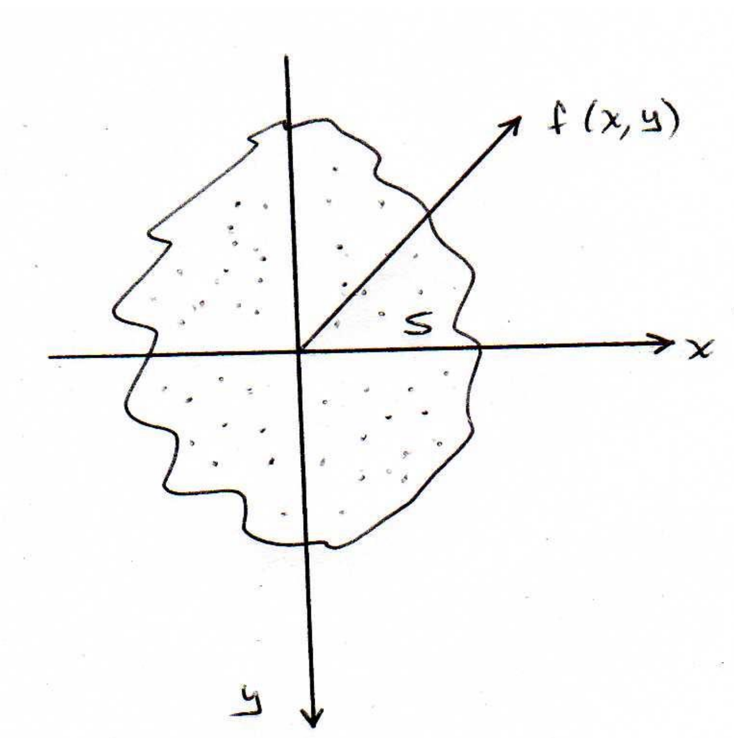
CAPITULO III

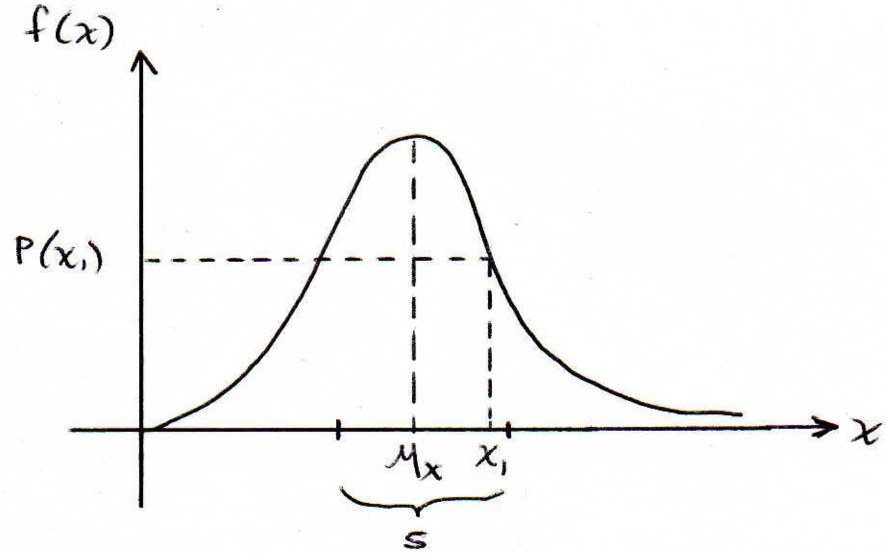
VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS.

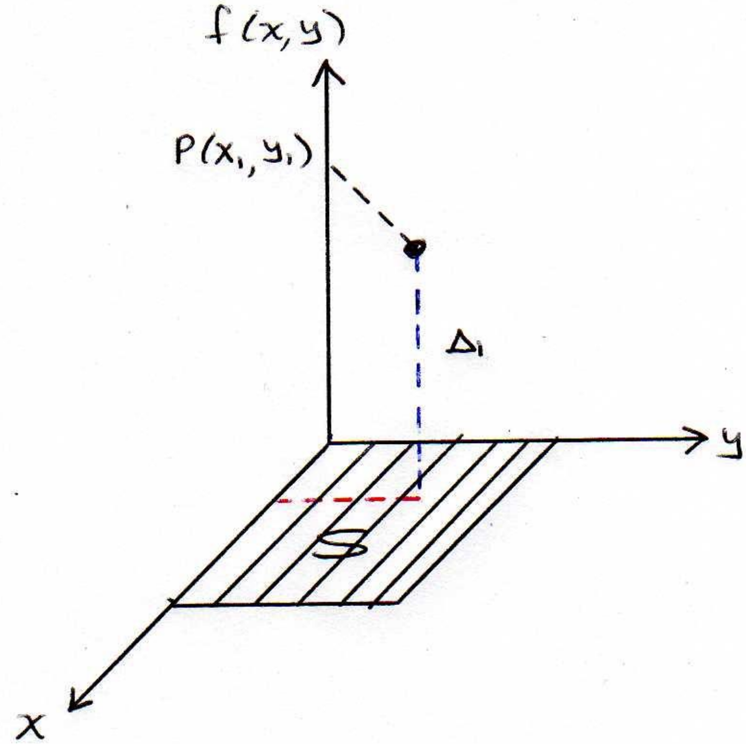
CONSIDERANDO EL CASO DE DOS DIMENSIONES. DADO UN ESPERIMENTO, EL PAR (x , y) SE CONOCE COMO UNA VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL (O VECTOR) SI CADA x , y ASOCIA UN NUMERO REAL A CADA ELEMENTO DEL ESPACIO MUESTRAL, S.

V.A. x $\rightarrow$ P(x)
- **DISTRIBUCION BERNOULLI**
- **DISTRIBUCION BINOMIAL**
- **DISTRIBUCION GEOMETRICA**

f (x)
- **DISTRIBUCION POISSON**
- **DISTRIBUCION EXPONENCIAL**
- **DISTRIBUCION NORMAL**
- **DISTRIBUCION UNIFORME**



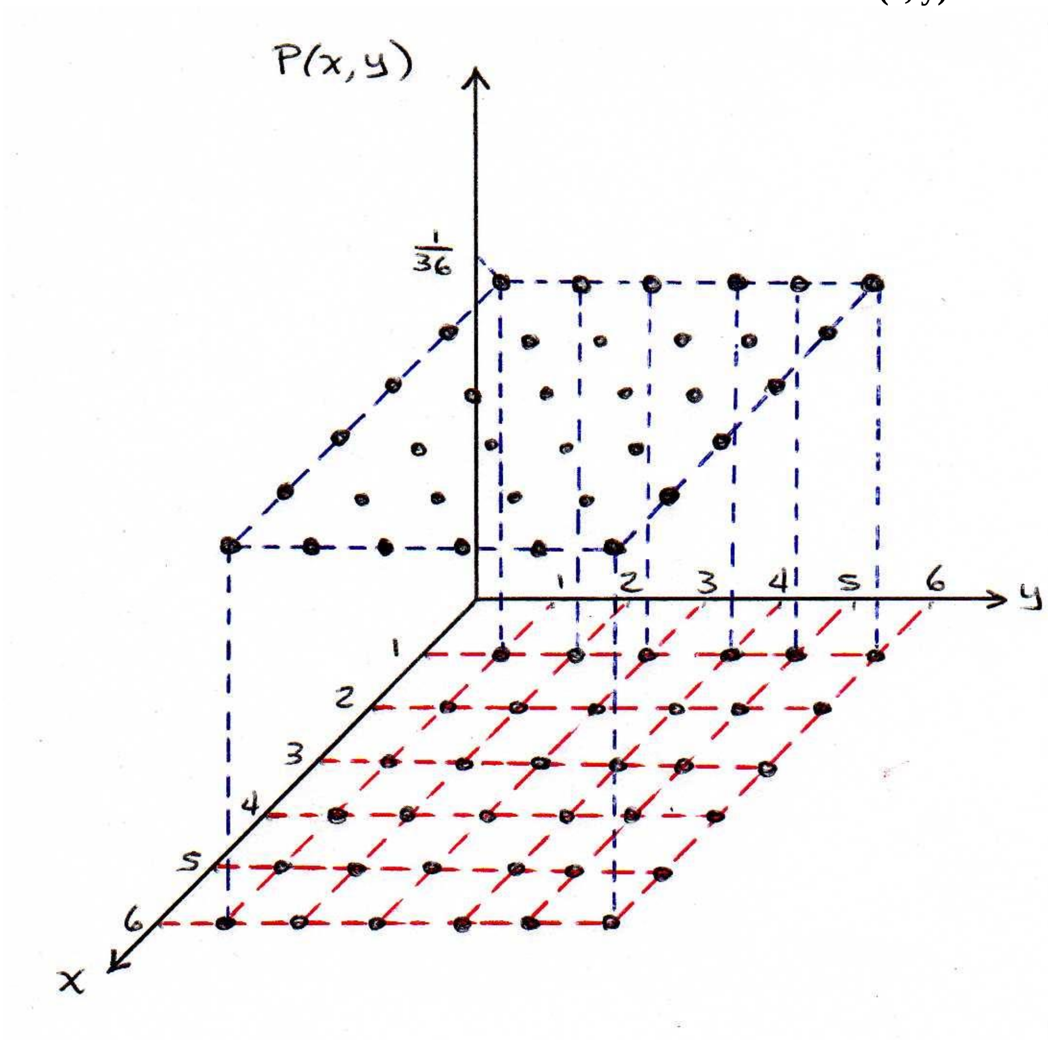

f(x)
P(x₁)
μ_x
x_1
s
x


f(x,y)
P(x₁, y₁)
Δ₁
y
S
X

EJEMPLOS:

1.- SE TIRA UN DADO NO CARGADO DOS VECES. SEA "x" EL NUMERO QUE APARECE, EN LA 1ª. TIRADA Y SEA "y" EL NUMERO DE LA 2ª TIRADA.

TENEMOS LA VARIABLE ALEATORIA CONJUNTA (x, y)



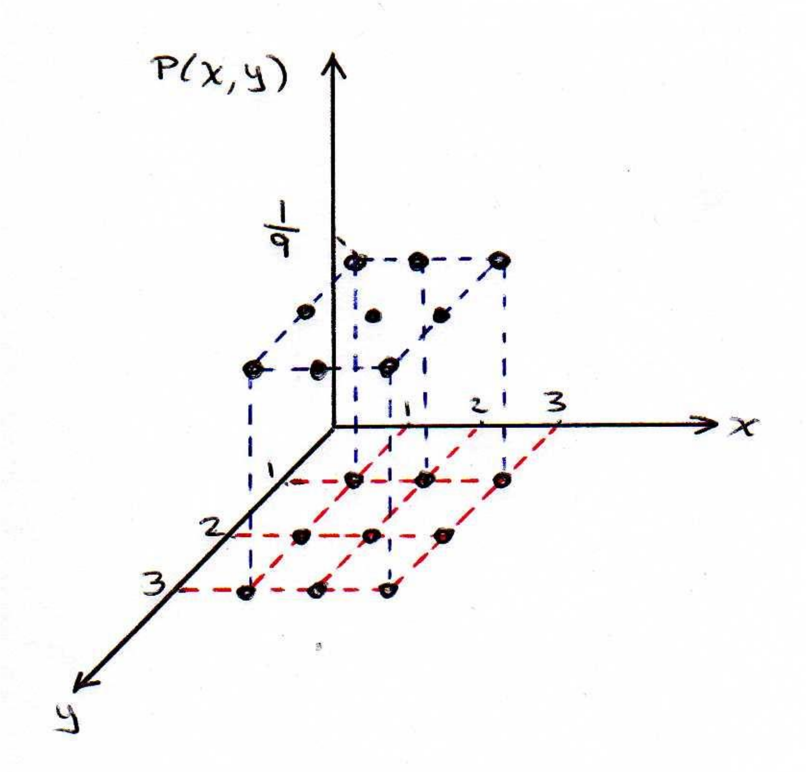
(x,y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,1)	……	(6,6)
P(x,y)	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	……	1/36

2.- UNA URNA QUE TIENE 3 BOLAS NUMERADAS DEL 1 AL 3. DE LA URNA SE SACAN 2 BOLAS, SI "x" REPRESENTA EL NUMERO DE PRIMERA BOLA EXTRAIDA Y "y" EL NUMERO DE LA SEGUNDA BOLA. DETERMINAR EL ESPACIO MUESTRAL Y LA DISTRIBUCION DE RPOBABILIDAD EN LOS SIGUIENTES CASOS:

A) SI LA EXTRACCION ES CON REMPLAZO
B) SI LA EXTRACCION ES SIN REMPLAZO.

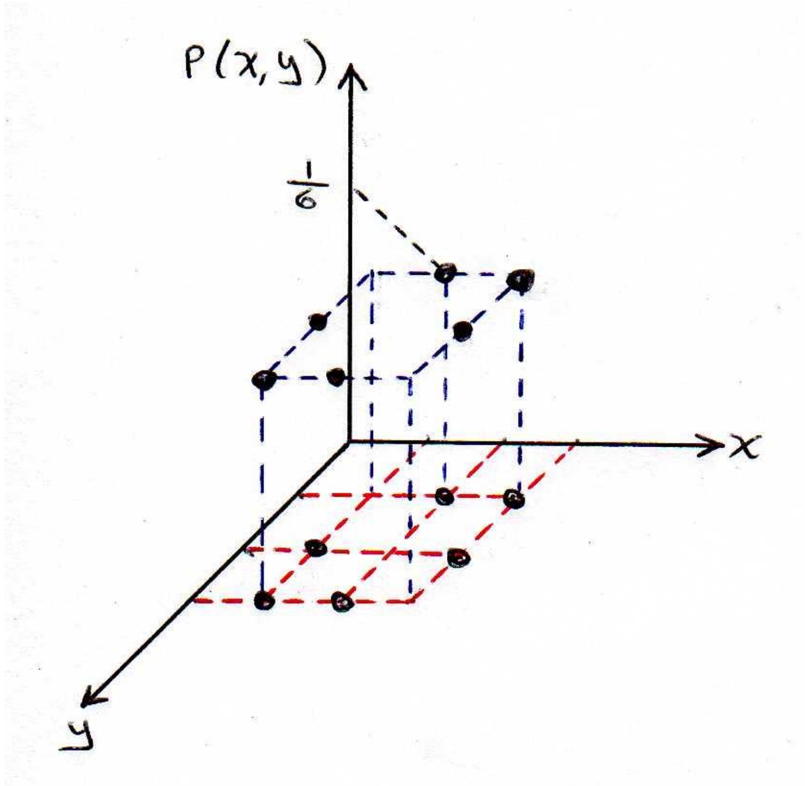
a)

(x , y)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	$\sum$
P(x,y)	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1



b)

(x,y)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	$\sum$
P(x,y)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1



PROBABILIDAD MARGINAL

SI (x, y) ES UNA V. A. CONJUNTA BIDIMENSIONAL Y x $\in$ y SON DISCRETAS, LA FUNCION DE PROBABILIDAD ES P(x, y).

A PARTIR DE P (x, y) SE PUEDE OBTENER LA PROBABILIDAD DE x, P(x), Y LA PROBABILIDAD DE y, P(y):

$$P(x) = \sum_{\forall y} P(x, y)$$

$$P(y) = \sum_{\forall x} P(x, y)$$

A LAS FUNCIONES P(x) Y P(y) SE LES LLAMA PROBABILIDAD MARGINAL DE "x" Y DE "y" RESPECTIVAMENTE.

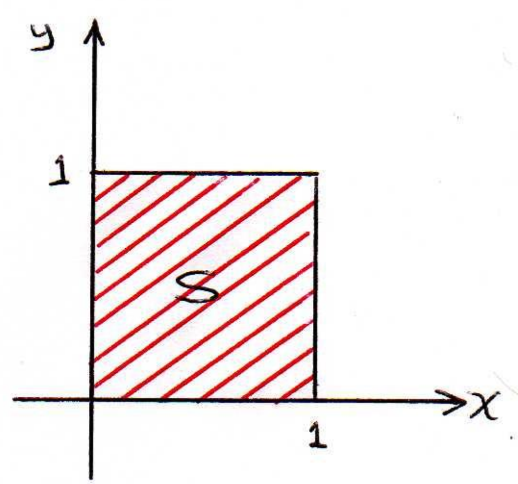
SI "x" Y "y" SON CONTINUAS, ENTONCES A PARTIR DE LA FUNCION f(x,y) PARA LA V.A (x, y), SE TIENE:

$$f(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$f(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

EJEMPLO:

1) SEA EL ESPACIO MUESTRAL:



DETERMINAR EL VALOR DE "C" PARA QUE

$$f(x, y) = C$$

SEA UNA FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD PARA (x, y)

a) $f(x, y) \geq 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < y < 1$

b) $\int_{X=0}^{1} \int_{Y=0}^{1} f(x, y)\, dx\, dy = 1$

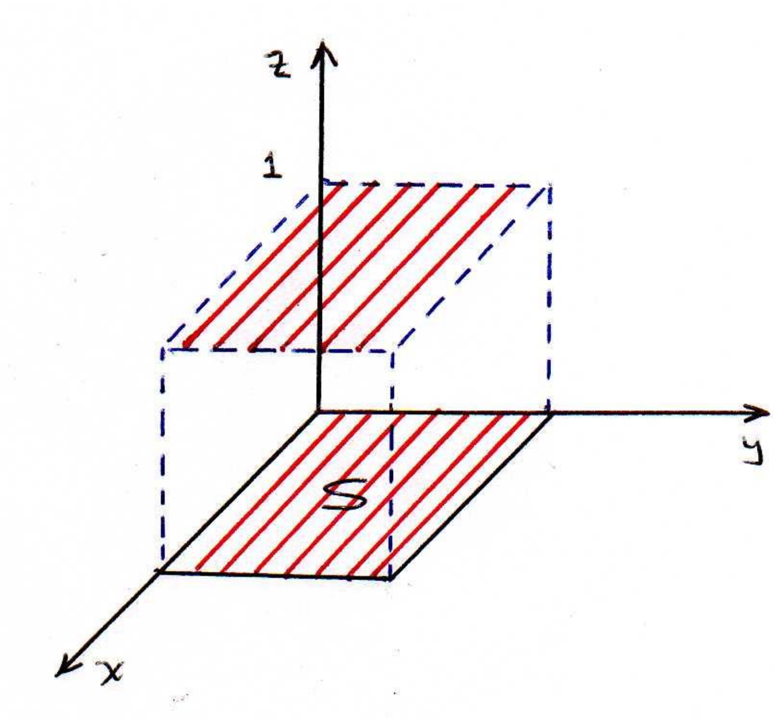
PARA EL PROBLEMA

$$\int_{X=0}^{1} \int_{Y=0}^{1} c\, dx\, dy = 1$$

$$\int_{X=0}^{1} (c\, y) \Big|_0^1 dx = 1$$

C = 1

$\therefore$ **f (x, y) = 1**



2.- PARA LA V.A. CONJUNTA (x, y) LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD ES:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x + y - 3xy^2); & 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1 \\ 0 & ; \quad \text{OTRO CASO} \end{cases}$$

CALCULAR LA PROBABILIDAD MARGINAL PARA "x" Y PARA "y"

$$f(x) = \int_{Y=0}^{1} f(x, y)\, dy$$

$$= \int_{Y=0}^{1} 2(x + y - 3xy^2)\, dy$$

$$= 2xy + y^2 - 2xy^3 \Big|_{y=0}^{1}$$

$$= 2x + 1 - 2x$$

$$f(x) = 1$$

$$f(y) = \int_{X=0}^{1} f(x, y)\, dx$$

$$= \int_{X=0}^{1} 2(x + y - 3xy^2)\, dx$$

$$= (x^2 + 2yx - 3x^2y^2) \Big|_0^1$$

$$= 1 + 2y - 3y^2$$

3) PROBLEMA.

UNA BOLSA TIENE 3 MONEDAS DE 50 PESOS, DOS DE 20 Y TRES DE 10 PESOS. SI LA V. A. "x" REPRESENTA EL NUMERO DE MONEDAS TOMADAS DE 50 PESOS Y LA V. A. "y" EL NUMERO DE MONEDAS TOMADAS DE 20 PESOS. SI SE TOMAN AL AZAR 4 MONEDAS, DETERMINAR

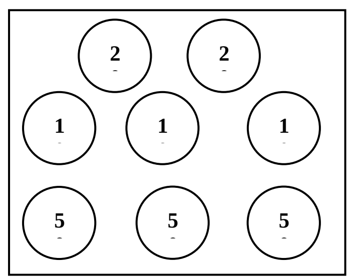
A) LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD PARA LA VARIABLE CONJUNTA.

B) LAS DISTRIBUCIONES MARGINALES g(x) Y h(y)

C) LA DISTRIBUCION CONDICIONAL P (x | y = 1)

x : V. A. NUMERO DE MONEDAS DE \$ 50

y : V. A. NUMERO DE MONEDAS DE \$ 20



y / x	0	1	2	3	
0	0	3 / 70	9 / 70	3 / 70	h(0) = 15/70
1	2 / 70	18 / 70	18/70	2 / 70	h(1) =40/70
2	3 / 70	9/70	3/70	0	h(2) = 15/70
	g(0) = 5/70	g(1) = 30/70	g(2) = 30/70	g(3) = 5/70	g(x) / h(y)

SE SACAN 4 MONEDAS AL AZAR

LA V. A. CONJUNTA (X, Y); $X = 0, 1, 2, 3$
$Y = 0, 1, 2$

$P(0, 0) = 0$

P (0, 1) = P (V,D,D,D) + P(D,V,D,D) + P(D,D,V,D) + P (D,D,D,V) =

= (2/8)(3/7)(2/6)(1/5) + (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) + (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) +

+ (3/8)(2/7)(1/6)(2/5) = 4 (2/8)(3/7)(2/6)(1/5) = 48/1680 = 2/70

P(2,2) = P(CCVV) + P(VVCC) + P(CVCV) + P(VCVC) + P(VCCV) + P(CVVC) =

= (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) + (2/8)(1/7)(3/6)(2/5) + (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) +

+ (2/8)(3/7)(1/6)(2/5) + (2/8)(3/7)(2/6)(1/5) + (3/8)(2/7)(1/6)(2/5) =

= 6 (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) = 72/1680 = 3/70

P(2,1) = P(CCVD) + P(CCDV) + P(DVCC) + P(VDCC) + P(CVCD) + P(CDCV) +

+ P(CDVC) + P(CVDC) + P(DCCV) + P(VCCD) + P(DCVC) + P(VCDC) =

= (3/8)(2/7)(2/6)(3/5) + (3/8)(2/7)(3/6)(2/5) + (3/8)(2/7)(3/6)(2/5) +

+ (2/8)(3/7)(3/6)(2/5) + (3/8)(2/7)(2/6)(3/5) + (3/8)(3/7)(2/6)(2/5) +

+ (3/8)(3/7)(2/6)(2/5) + (3/8)(2/7)(3/6)(2/5) + (3/8)(3/7)(2/6)(2/5) +

+ (2/8)(3/7)(2/6)(3/5) + (3/8)(3/7)(2/6)(2/5) + (2/8)(3/7)(3/6)(2/5) =

= 12 (3/8)(2/7)(2/6)(3/5) = 432 / 1,680 = 18 / 70

P(1,2) = P(CVVD) + P(DVVC) + P(VCDV) + P(VDCV) + P(VDVC) + P(VCVD) +

+ P(CVDV) + P(DVCV) + P(VVCD) + P(VVDC) + P(CDVV) + P(DCVV) =

= (3/8)(2/7)(1/6)(3/5) + (3/8)(2/7)(1/6)(3/5) + (2/8)(3/7)(3/6)(1/5) +

+ (2/8)(3/7)(3/6)(1/5) + (2/8)(3/7)(1/6)(3/5) + (2/8)(3/7)(1/6)(3/5) +

+ (3/8)(2/7)(3/6)(1/5) + (3/8)(2/7)(3/6)(1/5) + (2/8)(1/7)(3/6)(3/5) +

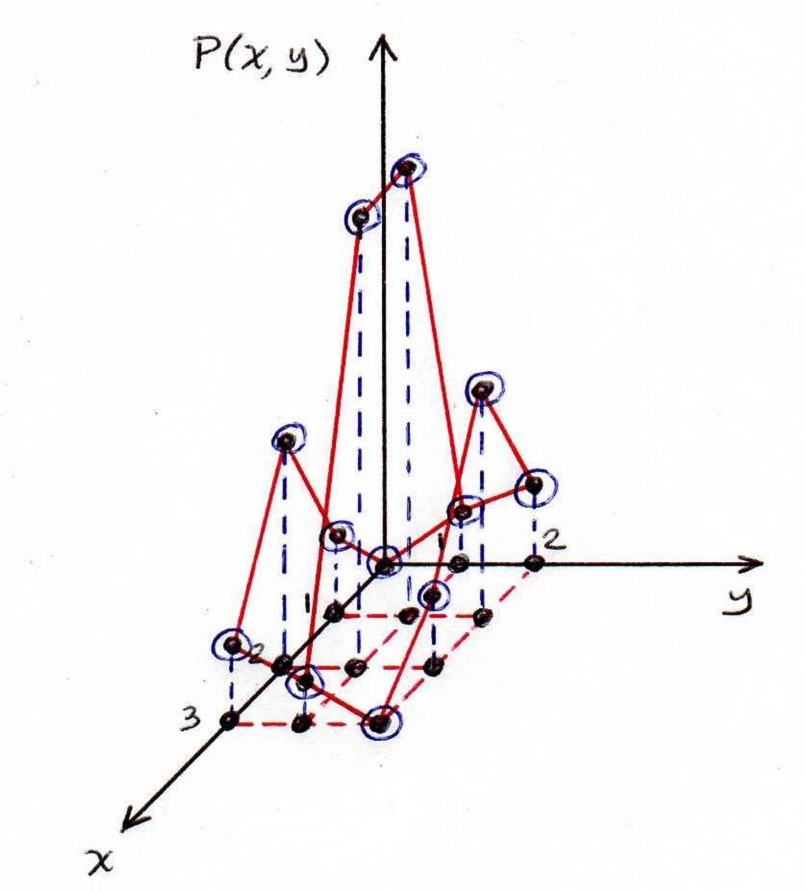
+ (2/8)(1/7)(3/6)(3/5) + (3/8)(3/7)(2/6)(1/5) + (3/8)(3/7)(2/6)(1/5) =

= 12 (3/8)(2/7)(1/6)(3/5) = 216 / 1,680 = 9 / 70

P(3,1) = P(CCCV) + P(CCVC) + P(CVCC) + P(VCCC) = (3/8)(2/7)(1/6)(2/5) +

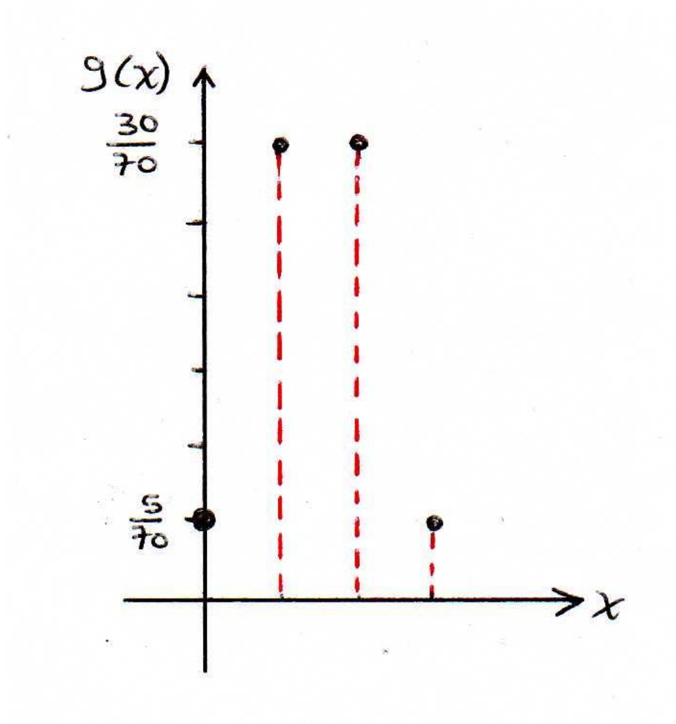
+ (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) + (3/8)(2/7)(2/6)(1/5) + (2/8)(3/7)(2/6)(1/5) =

= 4 (3/8)(2/7)(1/6)(2/5) = 48 / 1,680 = 2 / 70



b) $\mathbf{g(x) = \sum_{\forall Y} P(x, y) = P(x, 0) + P(x, 1) + P(x, 2)}$

g (x = 0) = P (0, 0) + P (0, 1) + P (0, 2) = 0 + (2/70) + (3/70) = 5/70



C) DETERMINAR LA DISTRIBUCION CONDICIONAL P(x│y = 1)

RECORDAR QUE DADOS DOS EVENTOS A Y B

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

POR EJEMPLO:

A = {0, 1, 2}   ;   y = 0, 1, 2

B = {0, 1, 2, 3}   ;   x = 0, 1, 2, 3

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}$$

EN EL PROBLEMA:

P (x│y = 1) =?

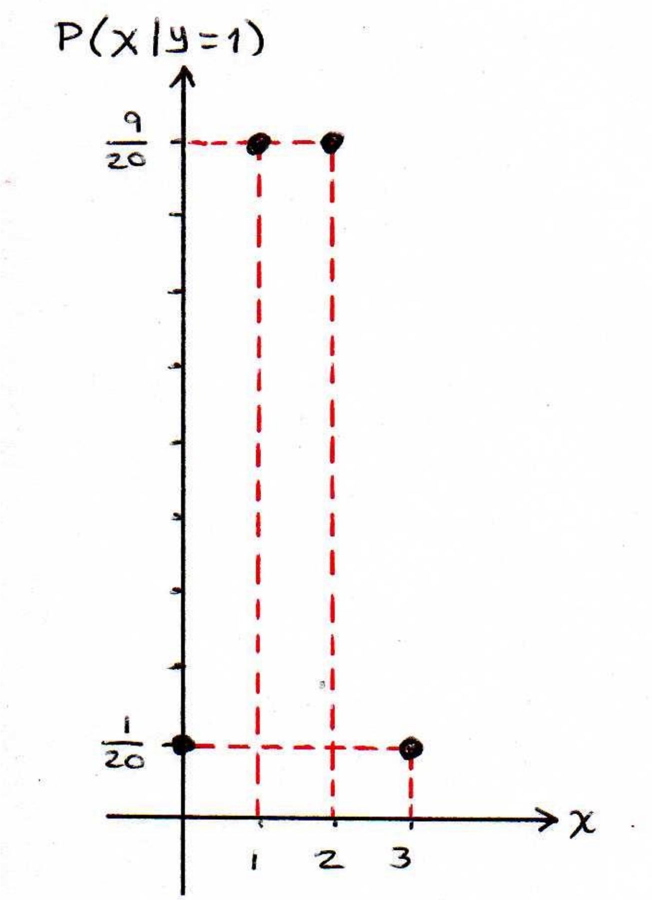
x = 0, 1, 2, 3

$$P(0 \mid y=1) = \frac{P(0,1)}{P(y=1)} = \frac{P(0,1)}{h(1)} = \frac{2/70}{40/70} = \frac{1}{20}$$

$$P(1 \mid y=1) = \frac{P(1,1)}{P(y=1)} = \frac{P(1,1)}{h(1)} = \frac{18/70}{40/70} = \frac{9}{20}$$

$$P(2 \mid y=1) = \frac{P(2,1)}{P(y=1)} = \frac{P(2,1)}{h(1)} = \frac{18/70}{40/70} = \frac{9}{20}$$

$$P(3 \mid y=1) = \frac{P(3,1)}{P(y=1)} = \frac{P(3,1)}{h(1)} = \frac{2/70}{40/70} = \frac{1}{20}$$



VALORES ESPERADOS Y MOMENTOS.

SI (x, y) ES UNA V. A. CONJUNTA Y H (x, y) ES UNA FUNCION DE "x" Y DE "y", ENTONCES:

$$E\{H(x,y)\} = \begin{cases} \sum_{X} \sum_{Y} H(x,y)\,P(x,y) & ;\ \text{CASO DISCRETA} \\ \int_{-}\int_{-} H(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy & ;\ \text{CASO CONTINUA} \end{cases}$$

EJEMPLO:

UN COMERCIANTE PAGA UNA CANTIDAD "x" POR UN ARTICULO Y LO VENDE EN UNA CANTIDAD "y". SI SUPONEMOS QUE LA VARIABLE "xy" ES CONTINUA Y QUE SU FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD ES:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & x < y < 1,\quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{OTRO CASO} \end{cases}$$

¿Cuál ES LA UTILIDAD ESPERADA POR ARTICULO?

SOLUCION;

DEFINIR UNA FUNCION QUE REPRESENTE "UTILIDAD":

$$H(x,y) = y - x$$

$$E\{H(x,y)\} = E\{y - x) = \int_{X=0}^{1}\int_{Y=X}^{1} (y - x)(2)\,dx\,dy = 2\int_{X=0}^{1} (½\,y^2 - xy) \int_{Y=X}^{1} dx$$

$$= 2\int_{X=0}^{1} (½ - x - ½\,x^2 + x^2 + ⅓\,x^3)\,dx = 2\,(½\,x - ½\,x^2 + 1/6\,x^3) \Big|_{0}^{1}$$

$$= ⅓$$

MOMENTOS:

EL ij-ESIMO MOMENTO DE LA VARIABLE ALEATORIA (X,Y) SE DEFINE COMO:

$m_{ij} = E\{ x^i y^j \}$; $i = 0, 1, 2, \ldots$
$j = 0, 1, 2, \ldots$
(i y j NO DEBEN DE SER CERO SIMULTANEAMENTE).

RECORDAR QUE:

$$E = \{H(x, y)\} = \begin{cases} \sum \sum H(x,y)\, P(x,y) \\ \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} H(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

ASI POR EJEMPLO:

$m_{11} = E\{x,y\}$

$m_{12} = E\{x\, y^2\}$

$m_{02} = E\{x^0\, y^2\} = E\{y^2\}$

$m_{10} = E\{x\, y^0\} = E\{x\}$

OBSERVAR QUE: m_{i0} **SON LOS MOMENTOS DE "x" Y**
M_{0j} **SON LOS MOMENTOS DE "y"**

TRANSFORMADAS:

PARA UNA FUNCION DENSIDAD DE PROBABILIDAD f(x,y), LA TRANSFORMADA EXPONENCIAL ES:

$$f^T(s,t) = E\{e^{-(s\,x+t\,y)}\} = \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} e^{-(sx+ty)}\, f(x,y)\, dx\, dy$$

PARA UNA FUNCION DE PROBABILIDAD P(x,y) LA TRANSFORMADA GEOMETRICA ES:

$$P^T(z, \mu) = E\{z^X\ \mu^Y\} = \sum_{\forall X} \sum_{\forall Y} z^X\ \mu^Y P(x, y)$$

$$m_{ij} = \frac{1}{(-1)^{i}\ (-1)^{j}} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial s^{i}\ \partial t^{j}}\ f^{T}(s,t)\Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}}$$

EJEMPLO: SEA LA FUNCION DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ;\ x > O\ ,\ y > O \\ 0 & ;\ \text{OTROS VALORES} \end{cases}$$

OBTENER:

$m_{10},\ m_{01},\ m_{11}$

SOLUCION:

A) $m_{10} = ?$

METODO 1.

$$m_{10} = E\{x^{1}\, y^{0}\} = E\{x\} = \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} x\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\, e^{-y}\, dx\, dy = \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\, (-e^{-y})\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x\, e^{-x}\, dx = -x^{0} e^{-x} + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x} = 1$$

METODO 2.

y

$$f^{T}(s, t) = \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} e^{-sx}\, e^{-ty}\, f(x, t)\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-sx}\, e^{-ty}\, e^{-x}\, e^{-y}\, dx\, dy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)x}\, e^{-(t+1)y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s+t)x} \left[- \frac{1}{t+1} e^{-(t+1)y} \right]_0^\infty dx$$

$$= \frac{1}{t+1} \int_0^\infty e^{-(s+1)x} dx$$

$$= \frac{1}{t+1} \quad \frac{1}{s+1} \qquad ; \; f^T(s,t) = \frac{1}{t+1} \quad \frac{1}{s+1}$$

$$m_{10} = \frac{\partial}{\partial S} f^T(s,t) \Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = - \frac{1}{t+1} \quad \frac{-1}{(s+1)^2} \Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = 1$$

B) $m_{01} = ?$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} f^T(s,t) \Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = 1$$

C) $m_{11} = ?$

$$= \frac{\partial^2}{\partial s \, \partial t} f^T(s,t) \Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = \left[\frac{-1}{(s+1)^2} \right] \left[\frac{-1}{(t+1)^2} \right] \Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = 1$$

COVARIANCIA:

LA COVARIANCIA DE DOS VARIABLES x y y SE DEFINE:

$$\sigma_{XY} = E \{ (x - \mu_x)(y - \mu_y) \}$$

ES UNA MEDIDA DE LA MANERA EN QUE x Y y TIENDEN A VARIAR JUNTAS.

COEFICIENTE DE CORRELACION:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \; \sigma_y}$$

σ **xy = E { (x -** μ_X**) (y -** μ_Y**) }**

= E { xy – x μ **y – y** μ **y +** μ **x** μ **y }**

= E { x y } – E { x μ **y } – E { y** μ **x } + E {** μ **x** μ **y }**

= E { x y } – μ **y E { x } -** μ **x E { y } +** μ **x** μ **y E { 1 }**

= E { x y } – μ **y** μ **x –** μ **x** μ **y +** μ **x** μ **y**

= E { x y } – μ **x** μ **y**

$$\sigma_{xy} = E\{x\,y\} - \mu_x\,\mu_y$$

EJEMPLO:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y} & ;\ x > 0 \quad ,\ y > 0 \\ 0 & ;\ \text{OTROS VALORES} \end{cases}$$

CALCULAR σ **xy y** ρ **xy**

SOLUCION:

$$f^t(s, t) = \frac{1}{s+1} \; \frac{1}{t+1}$$

$m_{10} = 1$
$m_{01} = 1$
$m_{11} = 1$

A) $\sigma_{xy} = E\{x\,y\} - Mx\,My = m_{11} - m_{10}\,m_{01} = 1 - 1\,(1) = 0$

B) $\rho_{xy} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$

EJEMPLO:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & ;\ 0<x<1, \quad 0<y<1 \\ 0 & ;\ \text{OTROS VALORES} \end{cases}$$

CALCULAR σ_{xy} , ρ_{xy}

A) $\sigma_{xy} = E\{x y\} - \mu_x \mu_y$

$$E\{x y\} = m_{11} = \int_0^1 \int_0^1 (x + y)\, xy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2y + xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left((x^3/3)\, y + (x^2/2)\, y^2\right) \Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left((y/3) + (y^2/2)\right) dy$$

$$= (y^2/6) + (y^3/6) \Big|_0^1 = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$

$$m_{01} = E\{y\} = \int_0^1 \int_0^1 y\,(x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} xy^2 + \tfrac{1}{3} y^3\right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} x^2 + \tfrac{1}{3}x\right) \Big|_0^1 = 7 / 12$$

$m_{11} = \tfrac{1}{3}$
$m_{01} = 7 / 12 = m_{10}$

$$\sigma_{xy} = m_{11} - m_{01}\, m_{10} = \tfrac{1}{3} - (7 / 12)(7 / 12) = -1 / 144$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\, \sigma_y} = ?$$

$$\sigma_x^2 = E\{x^2\} - \mu_x^2 = m_{20} - (m_{10})^2$$

$$m_{20} = \int_0^1 \int_0^1 x^2 (x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(x^3 y + \tfrac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_0^1 dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} x^4 + 1/6\, x^3 \right) \Big|_0^1 = 10/24$$

$$\sigma x^2 = (10/24) - (7/12)^2 = ((60 - 49) / 144 = 11/144$$

$$\sigma y^2 = 11 / 144$$

$$\sigma x = (\sqrt{11}) / 12$$

$$\sigma y = (\sqrt{11}) / 12$$

$$\rho\, xy = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\, \sigma_y} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{\sqrt{11}}{12}\ \frac{\sqrt{11}}{12}} = -\frac{1}{11}$$

VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES.

DOS VARIABLES (INDEPENDIENTES) x Y y SON INDEPENDIENTES SI:

A) PARA EL CASO DISCRETO

P(x, y) = P (x) P (y)

B) PARA EL CASO CONTINUO

f(x, y) = f(x) f(y)

DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA

LA LEY DE PROBABILIDAD BIDIMENSIONAL, QUE ES UNA GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE PROBABILIDAD NORMAL UNIDIMENSIONAL, SE LLAMA "DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA". SI $[X1, X2]$ **ES UN VECTOR ALEATORIO NORMAL BIVARIADO, LA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA DE** $[X1, X2]$ **ES:**

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p2}}\ \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-p^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\,\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]\right\}$$

para $-\infty < x_1 < \infty$ **y** $-\infty < x_2 < \infty$ **.**

LA PROBABILIDAD CONJUNTA $P(a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2)$ **SE DEFINE COMO:**

$$\int_{a2}^{b2}\int_{a1}^{b1} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

Y SE REPRESENTA MEDIANTE EL VOLUMEN BAJO LA SUPERFICIE Y SOBRE LA REGIÓN $\{ (x_1, x_2): a_1 \le x_1 \le b_1, a_2 \le x_2 \le b_2 \}$**. OWEN (1962) HA PROPORCIONADO UNA TABLA DE PROBABILIDADES. LA DENSIDAD NORMAL BIVARIADA TIENE CINCO PARÁMETROS. ÉSTOS SON:** μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 **Y** ρ**, EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ENTRE** x_1 **Y** x_2**, TAL QUE**
$-\infty < \mu_1 < \infty$, $-\infty < \mu_2 < \infty$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ **Y** $-1 < \rho < 1$**.**

LAS DENSIDADES MARGINALES f_1 **Y** f_2 **ESTÁN DADAS, RESPECTIVAMENTE, COMO:**

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-(1/2)\left[x1-\mu1)/\sigma1)\right]^2}$$

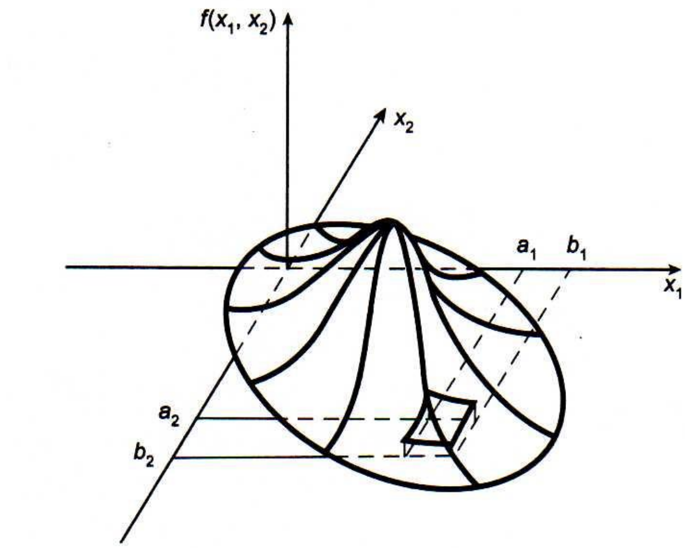


FIGURA: DENSIDAD NORMAL BIVARIADA

PARA $-\infty < x_1 < \infty$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left[x2-\mu2)/\sigma2)\right]^2}$$

PARA $-\infty < x_2 < \infty$

TENGA EN CUENTA QUE ESTAS DENSIDADES MARGINALES SON NORMALES; ESTO ES:

$x_1 \approx N(\mu_1, \sigma_1^2)$ **Y** $x_2 \approx N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

POR LO QUE

$E(x_1) = \mu_1$,
$E(x_2) = \mu_2$,
$V(x_1) = \sigma_1^2$,
$V(x_2) = \sigma_2^2$.

EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ρ **ES LA RAZÓN DE LA COVARIANCIA A** $[\sigma_1 . \sigma_2]$**. LA COVARIANCIA ES:**

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\, f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

POR LO TANTO:

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

LAS DISTRIBUCIONES CONDICIONALES $f_{x2|x1}(x_2)$ Y $f_{x1|x2}(x_1)$ TAMBIEN SON IMPORTANTES. ESTAS DENSIDADES CONDICIONALES SON NORMALES, COMO SE MUESTRA:

$$f_{x2|x1}(x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}\ \sqrt{1-p2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_2^{\,2}(1-p^2)} \left\{ x_2 - [\ \mu_2 + \rho(\sigma_2 \cdot \sigma_1)(x_1 - \mu_1)\ ] \right\}^2 \right]$$

PARA $-\infty < x_1 < \infty$ **Y**

$$f_{x1|x2}(x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}\ \sqrt{1-p2}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma_1^{\,2}(1-p^2)} \left\{ x_1 - [\ \mu_1 + \rho(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(x_2 - \mu_2)\ ] \right\}^2 \right]$$

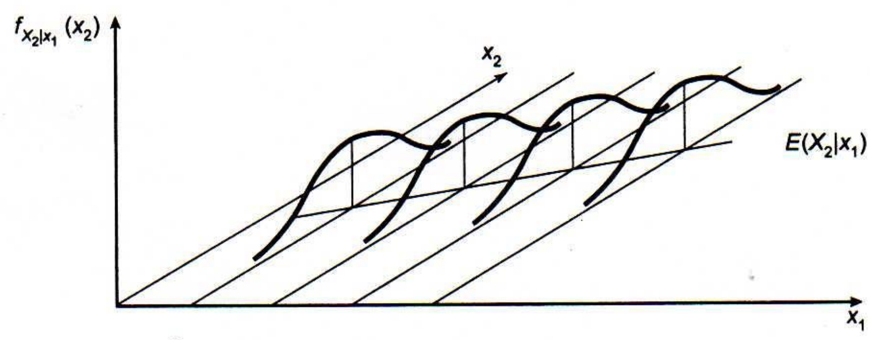
PARA $-\infty < x_1 < \infty$. LAS SIGUIENTES FIGURAS ILUSTRAN ALGUNAS DE ESTAS DENSIDADES CONDICIONALES. CONSIDERAREMOS PRIMERO LA DISTRIBUCIÓN $f_{x2|x1}$. LA MEDIA Y LA VARIANCIA SON :

$$E(x_2 \mid x_1) = \mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1)$$

FIGURAS :

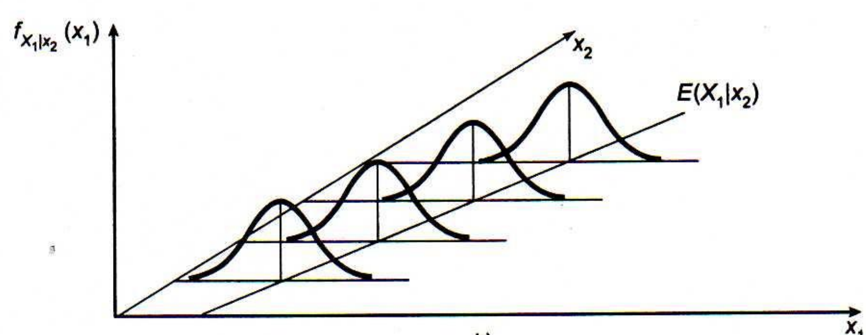
ALGUNAS DISTRIBUCIONES TÍPICAS.

A) **EJEMPLO DE DISTRIBUCIONES CONDICIONALES DE x_2 PARA UNOS CUANTOS VALORES DE x_1.**



a)

B) **EJEMPLO DE DISTRIBUCIONES CONDICIONALES x_1 PARA UNOS CUANTOS VALORES DE x_2.**



b)

Y

$$V(x_2 \mid x_1) = \sigma_2^2(1 - \rho^2)$$

ADEMÁS, $f_{x2} \mid_{x1}$ ES NORMAL; ESTO ES,

$$x_2 \mid x_1 \approx N\left[\ \mu_2 + \rho(\sigma_2/\sigma_1)(x_1 - \mu_1),\ \sigma_2^2(1 - \rho^2)\ \right].$$

EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS VALORES ESPERADOS DE x_2 PARA x_1 DADA COMO SE MUESTRA EN LA ECUACIÓN DE LAS FIGURAS ANTERIORES, SE LLAMA REGRESIÓN DE x_2 SOBRE x_1, Y ES LINEAL. ADEMÁS, LA VARIANCIA EN LAS DISTRIBUCIONES CONDICIONALES ES CONSTANTE PARA TODA x_1.

EN EL CASO DE LA DISTRIBUCIÓN $f_{x1} \mid_{x2}$, LOS RESULTADOS SON SIMILARES. ESTO ES:

$$E(x_1 \mid x_2) = \mu_1 + \rho(\sigma_1/\sigma_2)(x_2 - \mu_2)$$

$$V(x_1 \mid x_2) = \sigma_1^2(1 - \rho^2),$$

Y

$$x_1 \mid x_2 \approx N\left[\ \mu_1 + \rho(\sigma_1/\sigma_2)(x_2 - \mu_2),\ \sigma_1^2(1 - \rho^2)\ \right].$$

EN LA DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA OBSERVAMOS QUE SI $\rho = 0$, LA DENSIDADA CONJUNTA PUEDE FACTORIZARSE EN EL PRODUCTO DE LAS DENSIDADES MARGINALES Y, POR ELLO, x_1 Y x_2 SON INDEPENDIENTES. EN CONSECUENCIA, EN UNA DENSIDAD NORMAL BIVARIADA, LA CORRELACIÓN ES CERO Y LA INDEPENDENCIA SON EQUIVALENTES. SI SE HACEN PASAR PLANOS PARALELOS AL PLANO x_1, x_2 A TRAVEZ DE LA SUPERFICIE QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA AL INICIO DEL TEMA, LOS CONTORNOS QUE SE CORTAN A PARTIR DE LA SUPERFICIE NORMAL BIVARIADA SON ELIPSES.

EJEMPLO:

AL ELABORAR LA POLÍTICA DE ADMISIÓN EN UNA GRAN UNIVERSIDAD, LA OFICINA DE PRUEBA Y EVALUACIÓN DE ESTUDIANTES HA NOTADO QUE x_1, LAS CALIFICACIONES COMBINADAS EN LOS EXAMENES DEL CONSEJO UNIVERSITARIO, Y x_2, EL PROMEDIO DE PUNTUACIÓN POR GRADO ESTUDIANTIL AL FINAL DEL PRIMER AÑO, TIENEN UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL BIVARIADA. UNA PUNTUACIÓN DE GRADO DE 4.0 CORRESPONDE A "A". UN ESTUDIO INDICA QUE:

$$\mu_1 = 1300$$

$\mu_{2} = 2.3$
$\sigma_1^2 = 6400$
$\sigma_2^2 = 0.25$
$\rho = 0.6$

CUALQUIER ESTUDIANTE CON UN PROMEDIO DE CALIFICACIÓN MENOR DE 1.5 REPRUEBA AUTOMÁTICAMENTE AL FINAL DEL PRIMER AÑO UNIVERSITARIO; SIN EMBRAGO, UN PROMEDIO DE 2.0 SE CONSIDERA SATISFACTORIO.

UN SOLICITANTE REALIZA LOS EXÁMENES DEL CONSEJO UNIVERSITARIO, OBTIENE UNA CALIFICACIÓN COMBINADA DE 900 Y NO ES ACEPTADO. FURIOSO, SU PADRE ARGUMENTA QUE EL ESTUDIANTE TENDRÁ UN DESEMPEÑO SATISFACTORIO Y, ESPECÍFICAMENTE, QUE TENDRÁ UN PROMEDIO DE CALIFICACIONES SUPERIOR A 2.0 AL FINAL DEL PRIMER AÑO UNIVERSITARIO. CONSIDERANDO SÓLO LOS ASPECTOS PROBABILÍSTICOS DEL PROBLEMA, EL DIRECTOR DE ADMISIONES DESEA DETERMINAR $P(x_2 \geq 2.0 \mid x_1 = 900)$. TOMANDO EN CUENTA QUE:

$$E(x_2 \mid 900) = 2.3 + (0.6)(0.5/80)(900 - 1300) = 0.8$$

$$V(x_2 \mid 900) = 0.16$$

EL DIRECTOR CALCULA:

$$1 - \phi((2.0 - 0.8)/0.4) = 0.0013$$

LO CUAL PREDICE QUE SÓLO HAY UNA LIGERA ESPERANZA DE QUE LAS PROMESAS DEL PADRE SEAN VÁLIDAS.